(Χαρακτηριστική Λυτικής προβλήματος)

Εκλογικά συστήματα

Σκοπός των εκλογικών συστημάτων είναι να απεικονίσουν όσο γίνεται πιο πιστά τη θέληση του εκλογικού σώματος. Θεωρούμε τρία εκλογικά συστήματα 1) το πλειοψηφικό, 2) το σύστημα Borda, 3) το σύστημα Hare.

Έστω ότι υπάρχουν 3 υποψήφιοι A, B, C. Στο 1ο εκλέγεται ο υποψήφιος με τις περισσότερες ψήφους, στο 2ο κάθε εκλογέας κατατάσσει τους υποψηφίους πρώτο, δεύτερο και τρίτο. Υπολογίζεται η μέση κατάταξη καθενός και ο έχων το μεγαλύτερο βεβαρημένο μέσο όρο κερδίζει. Στο 3ο πάλι κάθε εκλογέας κατατάσσει πρώτο, δεύτερο και τρίτο τους υποψήφιους. Εάν κανένας υποψήφιος δεν συγκεντρώσει την απόλυτη πλειοψηφία από πρωτιές τότε ο υποψήφιος με τις λιγότερες πρωτιές αποκλείεται και οι πρωτιές του δίνονται σε εκείνο τον υποψήφιο που έχει καταταγεί δεύτερος σε πρωτιές. Τα αποτελέσματα μιας ψηφοφορίας δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Κατάταξη	Αριθμός ψηφοδελτίων
ABC	10
ACB	4
BAC	2
BCA	7

CAB	3
CBA	7

Να εξαχθούν τα αποτελέσματα με κάθε εκλογικό σύστημα.

Βιβλιογραφία:

Simson + Growney

Ίδρυμα Ευγενίδη 510.76G

Σημείωση: Ένα θεώρημα του K. Arrow αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει τέλειο εκλογικό σύστημα : «Κάθε σύστημα μπορεί να μαγειρευτεί».

Δώστε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Ι. Α Σύστημα

Στο πρώτο σύστημα η κατάταξη των υποψηφίων γίνεται με βάση τους αριθμούς των ψήφων που τους δίνουν πρώτη θέση στην τριάδα.

Άρα με το πρώτο σύστημα η κατανομή των νικητών είναι η εξής:

$1^{ος}$ ο Α υποψήφιος με 14 ψήφους για την $1^{η}$ θέση

$2^{ος}$ ο Γ υποψήφιος με 10 ψήφους για την $1^{η}$ θέση

$3^{ος}$ ο Β υποψήφιος με 9 ψήφους για την $1^{η}$ θέση

ΙΙ. Β Σύστημα

Έστω $\alpha_i=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$ η διατεταγμένη τριάδα που δηλώνει το πλήθος των ψήφων που παίρνει ο ι ($1\leq i\leq 3$) υποψήφιος για την j ($1\leq j\leq 3$) θέση .

Τότε ο πίνακας

$$\Pi=\left[\alpha_{ij}\right]=\begin{bmatrix}14 & 5 & 14\\ 9 & 17 & 2\\ 10 & 11 & 12\end{bmatrix}\begin{matrix}\mathrm{A}\,\upsilon\pi o\psi\acute{\eta}\phi\iota o\varsigma\\ \mathrm{B}\,\upsilon\pi o\psi\acute{\eta}\phi\iota o\varsigma\\ \Gamma\,\upsilon\pi o\psi\acute{\eta}\phi\iota o\varsigma\end{matrix}$$

Εκφράζει την κατανομή των ψήφων κάθε υποψηφίου για την j θέση ($1\leq j\leq 3$)

Θεωρούμε μία συγκεκριμένη διατεταγμένη τριάδα βαρών

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ =(3,2,1) έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο $[\alpha_i, \beta]$ να εκφράζει το σύνολο των ΄΄βαθμών΄΄ που παίρνει ο i υποψήφιος.

Τότε ο μέσος όρος των βαθμών των τριών υποψηφίων δίνεται από τον πίνακα

$$\mathrm{M} = \frac{1}{33}\Pi.\mathrm{B} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 14 & 5 & 14 \\ 9 & 17 & 2 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 68/33 \\ 64/33 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, με το δεύτερο σύστημα και την τριάδα βαρών B=(3,2,1) η τελική κατάταξη των υποψηφίων είναι η εξής:

1^{ος} ο B υποψήφιος με μέσο όρο (68/33) > 2

2^{ος} ο A υποψήφιος με μέσο όρο 2

3^{ος} ο Γ υποψήφιος με μέσο όρο (64/33) < 2

Τρίτο σύστημα

Σύμφωνα με το πρώτο σύστημα, ο υποψήφιος Β (ο οποίος έχει τις λιγότερες ΄΄πρωτιές΄΄), αποκλείεται από την κατανομή και οι ΄΄πρωτιές΄΄ του δίνονται στον υποψήφιο Γ. Τότε η κατάταξη γίνεται ως εξής:

ABC	10
ACB	4
BAC	0
BCA	0
CAB	5
CBA	14

Θεωρήσαμε ότι τα ψηφοδέλτια της μορφής BAC προσμετρούνται στα ψηφοδέλτια της μορφής CAB και τα ψηφοδέλτια της μορφής BCA προσμετρούνται στα ψηφοδέλτια της μορφής CBA.

Συνεπώς, σύμφωνα με:

- Το πρώτο σύστημα η κατανομή των νικητών είναι η εξής:

  1ος ο Γ υποψήφιος με 19 ψήφους για την 1η θέση,

  2ος ο Α υποψήφιος με 14 ψήφους για την 1η θέση

- Το δεύτερο σύστημα, και θεωρώντας ως διατεταγμένη τριάδα βαρών $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$=(3,2,1), ο μέσος όρος των βαρών των υποψηφίων Α και Γ, δίνεται από τον πίνακα

$$M' = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 14 & 5 & 4 \\ 19 & 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56/33 \\ 75/33 \end{bmatrix}$$

Άρα η κατανομή των νικητών, είναι η εξής:

1ος ο υποψήφιος Γ με μέσο όρο 75/33

2ος ο υποψήφιος Α με μέσο όρο 56/33

II. Παρατηρούμε ότι με το δεύτερο σύστημα, αν θεωρήσουμε μία τυχαία τριάδα βαρών $b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, τότε τα εσωτερικά γινόμενα $[\alpha_i,\beta]$ και κατά συνέπεια οι αντίστοιχοι μέσοι όροι των ψήφων για κάθε υποψήφιο α_i, εξαρτώνται από το συν(α_i,β).

Συγκεκριμένα κάθε εσωτερικό γινόμενο $[\alpha_i,\beta]$ παίρνει μέγιστη τιμή την $|\alpha_i||\beta|$, αν και μόνο αν συν$(\alpha_i,\beta)=1$.

Συνεπώς κατάλληλη επιλογή του διανύσματος $b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ μπορεί να μεταβάλλει την τιμή των εσωτερικών γινομένων $[\alpha_i, \beta]$ για

$1 \leq i \leq 3$, δηλαδή το δεύτερο σύστημα.

Παρόμοια και για το τρίτο σύστημα.